Notación asintótica I

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Maestría en Ciencias de la Computación
Análisis y Diseño de Algoritmos
MCOM 20300

Contenido

Motivación

- ¿Cómo demostrar que $g(n) \notin O(f(n))$?

Motivación

- Haciendo una demostración por contradicción.

Motivación

- Es decir, suponiendo que sí lo está y esperando llegar a una contradicción.

Ejemplo: $n^3 \notin O(n^2)$

Por contradicción, vamos a suponer que $n^3 \in O(n^2)$, así deben existir $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $n^3 \leq cn^2$, por lo tanto:

Ejemplo: $n^3 \notin O(n^2)$

Por contradicción, vamos a suponer que $n^3 \in O(n^2)$, así deben existir $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $n^3 \leq cn^2$, por lo tanto:

$$n^3 \leq cn^2$$
$$n^{-2}n^3 \leq cn^2n^{-2}$$
$$n \leq c$$

Ejemplo: $n^3 \notin O(n^2)$

Por contradicción, vamos a suponer que $n^3 \in O(n^2)$, así deben existir $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $n^3 \leq cn^2$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} n^3 &\leq cn^2 \\ n^{-2}n^3 &\leq cn^2n^{-2} \\ n &\leq c \end{aligned}$$

La última desigualdad es falsa, por lo tanto hemos llegado a una contradicción porque los números naturales no están acotados superiormente.

Ejemplo: $n^3 \notin O(n^2)$

Por contradicción, vamos a suponer que $n^3 \in O(n^2)$, así deben existir $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $n^3 \leq cn^2$, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
n^3 &\leq cn^2 \\
n^{-2}n^3 &\leq cn^2n^{-2} \\
n &\leq c
\end{aligned}
$$

La última desigualdad es falsa, por lo tanto hemos llegado a una contradicción porque los números naturales no están acotados superiormente. Así concluimos que:

$$n^3 \notin O(n^2).$$

La regla del límite

Afortunadamente existe una manera más poderosa y versatil para probar tanto que una función está en el orden de otra, como para probar que una función no está en el orden de otra, se le llama la **regla del límite**.

Proposición 1 (Regla del Límite)

Sean f y g dos funciones de comportamiento.

1. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.
2. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$.
3. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ entonces $f(n) \notin O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Ejemplos de uso de la regla del límite

1. $$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2} > 0, \text{ así } n^2 \in O(2n^2) \text{ y } 2n^2 \in O(n^2).$$

Ejemplos de uso de la regla del límite

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2 > 0, \text{ así } 2n^2 \in O(n^2) \text{ y } n^2 \in O(2n^2).$$

Ejemplos de uso de la regla del límite

3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ así } n^2 \in O(n^3) \text{ y } n^3 \notin O(n^2).$$

Ejemplos de uso de la regla del límite

4. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n = \infty, \text{ así } n^3 \notin O(n^2) \text{ y } n^2 \in O(n^3).$$

La regla de l'Hôpital I

Teorema 2 (Regla de l'Hôpital)

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} g(n) = 0$, o bien $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$, y $\lim_{x\to\infty} \bar{f}'(x)/\bar{g}'(x) = \ell$, donde $\bar{f}$ y $\bar{g}$ son las correspondientes extensiones de f y g a los reales ($\bar{f}, \bar{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell.$$

La regla de l'Hôpital II

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,$$ así $\log n \in O(\sqrt{n})$ y $\sqrt{n} \notin O(\log n)$.

La regla de l'Hôpital II

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \text{así}\ \log n\in O(n)\ \text{y}\ n\notin O(\log n).$$

La regla de l'Hôpital II

3. Como $\log n \in O(n)$, entonces $\log n \leq cn$ (para $c > 0$ y $n \geq N$), así $n \log n \leq cn^2$, es decir, $n \log n \in O(n^2)$. Y en general $n^k \log n \in O(n^{k+1})$.

La regla de l'Hôpital III

Por supuesto que podemos obtener la misma relación usando la regla de l'Hôpital, pero con un poco más de trabajo.

La regla de l'Hôpital III

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k \log n}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{kn^{k-1}\log n + n^k \frac{1}{n}}{(k+1)n^k} =$$

La regla de l'Hôpital III

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\log n}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{kn^{k-1}\log n + n^k\frac{1}{n}}{(k+1)n^k} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{kn^{k-1}\log n + n^{k-1}}{(k+1)n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-1}(k\log n + 1)}{(k+1)n^k} =$$

La regla de l'Hôpital III

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\log n}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{kn^{k-1}\log n+n^k\frac{1}{n}}{(k+1)n^k}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{kn^{k-1}\log n+n^{k-1}}{(k+1)n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-1}(k\log n+1)}{(k+1)n^k}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k\log n+1}{(k+1)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{k\log n}{(k+1)n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(k+1)n}=$$

La regla de l'Hôpital III

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k \log n}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{kn^{k-1}\log n + n^k \frac{1}{n}}{(k+1)n^k} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{kn^{k-1}\log n + n^{k-1}}{(k+1)n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{k-1}(k\log n + 1)}{(k+1)n^k} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k\log n + 1}{(k+1)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k\log n}{(k+1)n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(k+1)n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{k+1}\frac{\log n}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k+1}\frac{1}{n} =$$

La regla de l'Hôpital III

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\log n}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{kn^{k-1}\log n + n^k\frac{1}{n}}{(k+1)n^k} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{kn^{k-1}\log n + n^{k-1}}{(k+1)n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-1}(k\log n + 1)}{(k+1)n^k} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k\log n + 1}{(k+1)n} = \lim_{n\to\infty}\frac{k\log n}{(k+1)n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(k+1)n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{k+1}\frac{\log n}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k+1}\frac{1}{n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{k+1}\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} =$$

La regla de l'Hôpital III

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\log n}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{kn^{k-1}\log n + n^k\frac{1}{n}}{(k+1)n^k} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{kn^{k-1}\log n + n^{k-1}}{(k+1)n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-1}(k\log n + 1)}{(k+1)n^k} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k\log n + 1}{(k+1)n} = \lim_{n\to\infty}\frac{k\log n}{(k+1)n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(k+1)n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{k+1}\frac{\log n}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k+1}\frac{1}{n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{k+1}\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} =$$

$$\frac{k}{k+1}0 + \frac{1}{k+1}0 = 0$$

Sutileza importante

Observación 3

- Es correcto afirmar que como $\log n \in O(n)$, entonces $\log n \leq cn$ (para $c > 0$ y $n \geq N$), así $n^k \log n \leq cn^{k+1}$ (para $c > 0$ y $n \geq N$) y por tanto $n^k \log n \in O(n^{k+1})$.

Sutileza importante

Observación 3

- No obstante, sólo a través de la regla del límite podemos asegurar que $n^k \log n \in O(n^{k+1})$ y que $n^{k+1} \notin O(n^k \log n)$.

Definición 4

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función, se dice que f **converge** a ℓ, o que ℓ es el **límite** de f cuando n tiende a infinito ssi para toda $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_\epsilon$ entonces $|f(n) - \ell| < \epsilon$. Simbólicamente $\lim_{n \to \infty} f(n) = \ell$.

Demostración de la regla del límite II

1. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Demostración de la regla del límite II

1. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Demostración:

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)} - a\right| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - a < \epsilon$$

Demostración de la regla del límite II

1. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Demostración:

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)} - a\right| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - a < \epsilon$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} - a < \epsilon \Leftrightarrow \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon + a$$

Demostración de la regla del límite II

1. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Demostración:

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)} - a\right| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - a < \epsilon$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} - a < \epsilon \Leftrightarrow \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon + a$$

$$f(n) < (\epsilon + a)g(n), \ \therefore f(n) \in O(g(n)).$$

1. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Demostración:

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} - a \right| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - a < \epsilon$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} - a < \epsilon \Leftrightarrow \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon + a$$

$$f(n) < (\epsilon + a)g(n), \ \therefore f(n) \in O(g(n)).$$

$$-\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - a \Leftrightarrow (-\epsilon + a)g(n) < f(n)$$

Demostración de la regla del límite II

1. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Demostración:

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)} - a\right| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - a < \epsilon$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} - a < \epsilon \Leftrightarrow \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon + a$$

$$f(n) < (\epsilon + a)g(n), \ \therefore f(n) \in O(g(n)).$$

$$-\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - a \Leftrightarrow (-\epsilon + a)g(n) < f(n)$$

$$g(n) < \frac{1}{(-\epsilon + a)} f(n), \epsilon < a, \ \therefore g(n) \in O(f(n)).$$

Demostración de la regla del límite III

2. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$.

Demostración de la regla del límite III

2. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$.

Demostración:

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon$$

Demostración de la regla del límite III

2. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$.

Demostración:

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon$$

$$f(n) < \epsilon g(n), \; \therefore f(n) \in O(g(n)).$$

Demostración de la regla del límite III

2. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$.

Demostración:

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon$$

$$f(n) < \epsilon g(n), \ \therefore f(n) \in O(g(n)).$$

Suponga que $g(n) \in O(f(n)) \Leftrightarrow g(n) \leq df(n)$

2. Si $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$.

Demostración:

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon$$

$$f(n) < \epsilon g(n), \ \therefore f(n) \in O(g(n)).$$

Suponga que $g(n) \in O(f(n)) \Leftrightarrow g(n) \leq df(n)$

$$\frac{1}{d} \leq \frac{f(n)}{g(n)},$$

Demostración de la regla del límite III

2. Si $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$.

Demostración:

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon$$

$$f(n) < \epsilon g(n), \therefore f(n) \in O(g(n)).$$

Suponga que $g(n) \in O(f(n)) \Leftrightarrow g(n) \leq df(n)$

$$\frac{1}{d} \leq \frac{f(n)}{g(n)},$$

lo cual contradice que $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0, \therefore g(n) \notin O(f(n)).$

Demostración de la regla del límite IV

3. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ entonces $f(n) \notin O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Demostración de la regla del límite IV

3. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ entonces $f(n) \notin O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Demostración:

$$c < \frac{f(n)}{g(n)} \Leftrightarrow g(n) < \frac{1}{c} f(n), \ \therefore g(n) \in O(f(n)).$$

Demostración de la regla del límite IV

3. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = \infty$ entonces $f(n) \notin O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Demostración:

$$c < \frac{f(n)}{g(n)} \Leftrightarrow g(n) < \frac{1}{c} f(n), \ \therefore g(n) \in O(f(n)).$$

Suponga que $f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \leq dg(n)$,

3. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ entonces $f(n) \notin O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Demostración:

$$c < \frac{f(n)}{g(n)} \Leftrightarrow g(n) < \frac{1}{c} f(n), \; \therefore g(n) \in O(f(n)).$$

Suponga que $f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \leq dg(n)$,

$$\frac{f(n)}{g(n)} \leq d$$

Demostración de la regla del límite IV

3. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ entonces $f(n) \notin O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Demostración:

$$c < \frac{f(n)}{g(n)} \Leftrightarrow g(n) < \frac{1}{c} f(n), \ \therefore g(n) \in O(f(n)).$$

Suponga que $f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \leq dg(n)$,

$$\frac{f(n)}{g(n)} \leq d$$

lo cual contradice que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty, \ \therefore f(n) \notin O(g(n))$.

$\Omega(f(n))$

- Así como se estableció que un algoritmo no puede ser más lento que otro, podemos hacer algo para decidir que un algoritmo no puede ser más rápido que otro.

$\Omega(f(n))$

- Lo cual parece sencillo pues esta idea maneja la negación de lo que antes hemos visto.

Definición 5

La clase de funciones que están **acotadas inferiormente** por un múltiplo de f es:

$$\Omega(f(n)) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | (\exists d > 0, N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(g(n) \geq df(n))\}.$$

La relación entre O y Ω está dada por la siguiente proposición.

Proposición 6 (Regla de la Dualidad)

Sean f y g funciones de comportamiento, entonces $g(n) \in \Omega(f(n))$ ssi $f(n) \in O(g(n))$.

- Recordemos que el principio de invarianza establece que cualesquier implementaciones de un mismo algoritmo con comportamientos $f_1(n)$ y $f_2(n)$ satisfacen que $f_1(n) \leq cf_2(n)$ y $df_2(n) \leq f_1(n)$ para ciertas constantes $c, d > 0$ y para toda $n \geq N$.

- Este hecho aclara el uso de $g(n) \in O(f(n))$ y $g(n) \in \Omega(f(n))$, al afirmar que $g(n)$ no puede ser más lenta que $f(n)$ y $g(n)$ no puede ser más rápida que $f(n)$.

$\Theta(f(n))$ I

- La equivalencia de comportamientos es entonces cuando $g(n)$ no puede ser más lenta ni más rápida que $f(n)$.

$\Theta(f(n))$ II

Definición 7

La clase de funciones **equivalentes** a f es:

$$\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n)).$$

O bien
$\Theta(f(n)) = \{g(n) | (\exists c, d > 0, N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(df(n) \leq g(n) \leq cf(n))\}$

Observación 8

1. Análogas a las reglas del umbral y el máximo para O, son válidas para Θ:

Observación 8

1. Análogas a las reglas del umbral y el máximo para O, son válidas para Θ:

   Regla del Umbral para Θ: Sea f estrictamente positiva. $g(n) \in \Theta(f(n))$ si y sólo si existen $c, d > 0$ tal que $df(n) \leq g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Observación 8

1. Análogas a las reglas del umbral y el máximo para O, son válidas para Θ:

   Regla del Umbral para Θ: Sea f estrictamente positiva. $g(n) \in \Theta(f(n))$ si y sólo si existen $c, d > 0$ tal que $df(n) \leq g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

   Regla del Máximo para Θ: $\Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$.

Observación 8

1. Análogas a las reglas del umbral y el máximo para O, son válidas para Θ:

   Regla del Umbral para Θ: Sea f estrictamente positiva. $g(n) \in \Theta(f(n))$ si y sólo si existen $c, d > 0$ tal que $df(n) \leq g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

   Regla del Máximo para Θ: $\Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$.

2. Con ligeros cambios respecto de O tenemos la regla del límite para Θ:

Observación 8

1. Análogas a las reglas del umbral y el máximo para O, son válidas para Θ:

   Regla del Umbral para Θ: Sea f estrictamente positiva. $g(n) \in \Theta(f(n))$ si y sólo si existen $c, d > 0$ tal que $df(n) \leq g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

   Regla del Máximo para Θ: $\Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$.

2. Con ligeros cambios respecto de O tenemos la regla del límite para Θ:

   Regla del Límite para Θ: Sea $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = a$,

Observación 8

1. Análogas a las reglas del umbral y el máximo para O, son válidas para Θ:

   Regla del Umbral para Θ: Sea f estrictamente positiva. $g(n) \in \Theta(f(n))$ si y sólo si existen $c, d > 0$ tal que $df(n) \leq g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

   Regla del Máximo para Θ: $\Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$.

2. Con ligeros cambios respecto de O tenemos la regla del límite para Θ:

   Regla del Límite para Θ: Sea $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = a$,

   1. si $a > 0$ entonces $f(n) \in \Theta(g(n))$.

Observación 8

1. Análogas a las reglas del umbral y el máximo para O, son válidas para Θ:

   Regla del Umbral para Θ: Sea f estrictamente positiva. $g(n) \in \Theta(f(n))$ si y sólo si existen $c, d > 0$ tal que $df(n) \leq g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

   Regla del Máximo para Θ: $\Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$.

2. Con ligeros cambios respecto de O tenemos la regla del límite para Θ:

   Regla del Límite para Θ: Sea $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = a$,

   1. si $a > 0$ entonces $f(n) \in \Theta(g(n))$.
   2. si $a = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $f(n) \notin \Theta(g(n))$.

Observación 8

1. Análogas a las reglas del umbral y el máximo para O, son válidas para Θ:

   Regla del Umbral para Θ: Sea f estrictamente positiva. $g(n) \in \Theta(f(n))$ si y sólo si existen $c, d > 0$ tal que $df(n) \leq g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

   Regla del Máximo para Θ: $\Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$.

2. Con ligeros cambios respecto de O tenemos la regla del límite para Θ:

   Regla del Límite para Θ: Sea $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)/g(n) = a$,

   1. si $a > 0$ entonces $f(n) \in \Theta(g(n))$.
   2. si $a = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $f(n) \notin \Theta(g(n))$.
   3. Si $a = \infty$ entonces $f(n) \in \Omega(g(n))$ y $f(n) \notin \Theta(g(n))$.

1. Demuestre la regla de la dualidad.
2. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones:
    1. $n^3 \in \Omega(n^2)$.
    2. $2^{n+1} \in \Omega(2^n)$.
    3. $n! \in \Omega((n+1)!)$.
3. Demuestre la regla del máximo para Θ.
4. Demuestre la regla del límite para Θ.